Zlati rez skozi zgodovino

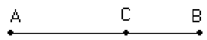
Vesna Zakošek

29. avgust 2005

1 Uvod

Ideja zlatega reza izvira iz estetskega problema: če postavljamo kvadratno garažo poleg kvadratne hiše, v kakšnem razmerju naj bosta stranici garaže in hiše, da bo celota izgledala najlepše. Odgovor, ki ga poda zahodna umetnost je: *dinamična simetrija*, ki je odsev naravnega ravnovesja med simetrijo in asimetrijo.

Daljico razdelimo na dva neenaka dela tako, da bo razmerje dolžin večjega dela proti manjšemu enako razmerju dolžin celotne daljice proti večjemu delu. Točka C deli daljico AB v *zlatem razmerju*, če je $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.



Delitev daljice

Ime zlatega reza se pojavi precej pozno in ga dejansko ni uporabljal noben od matematikov, ki so odkrivali njegove lastnosti.

Prvi indikator uporabe zlatega reza se pojavi v egipčanski arhitekturi, konkretno na Keopsovi Veliki piramidi.

Tudi stari Grki naj bi ga uporabljali: celotni načrt Partenona naj bi namreč temeljil na zlatem rezu. Grški kipar in matematik *Phidias* (500-432 p.n.š.) je uporabljal zlati rez pri kiparjenju kipov v Partenonu in Olimpu. Idejo zlatega reza je v svojih *Elementih* prvi objavil grški matematik *Evklid* (365-300 p.n.š.) pod imenom *delitev daljice v ekstremnem in ponavljajočem razmerju.* Vprašanje, ki se pojavi, je, kdo je pred Evklidom raziskoval zlati rez. Skoraj gotovo je namreč, da je Evklid le zbral odkritja, torej jih je treba nekomu še pripisati. Knjigo II, v kateri je zlati rez prvič uporabljen (ne pa še definiran) pripisujejo nekateri *Teodorju* iz Kiren, spet drugi pa kar *Pitagori* ali vsaj pitagorejcem. Morda se je z zlatim rezom ukvarjal tudi *Evdoks* (410-347 p.n.š.), in sicer naj bi dobil navdih za to pri grškem filozofu *Platonu* (428-347 p.n.š.), ki naj bi v zlatem razmerju videl ključ do fizičnega vesolja . Avtor knjige XIV., kjer je zlati rez uporabljen pri kosntrukciji pravilnih teles včrtanih v krog, pa naj bi bil *Hipsiklej* (nastala okoli 150 p.n.š.).

Italijanski matematik *Leonardo Fibonacci* (1170-1250) je odkril fibonaccijevo zaporedje, ki je tesno povezano z zlatim rezom, vendar pa ni znano, ali se je te povezave zavedal ali ne. Fibonaccijevo zaporedje so dejansko poznali že pred Fibonaccijem. V 12. stoletju so ga namreč uporabljali kot pravilo za sestavitev verza v zvrsti Sanskritnih pesmi: matravrittas. Indijski poeti pa naj bi ga poznali še pred Fibonaccijevim rojstvom, a so zahodni matematiki to odkrili šele leta 1985.

Leta 1509 je izšlo delo *Luca Paioli*-ja *De Divina Proportione* (Božansko razmerje), kar je Paciolijevo ime za zlati rez. V delu so zbrana dotedanja odkritja glede zlatega reza in ilustriracije slavnega *Leonarda da Vincija* (1452-1519), ki naj bi dal zlatemu rezu prvi ime *sectio aurea* (latinsko ime za zlati rez). Tudi ostali renesančni umetniki poleg da Vincija so veliko uporabljali zlato razmerje v slikah in kipih za dosego ravnovesja in lepote.

Današnje ime je prvi uporabil šele Martin Ohm v knjigi Die reine Elementar-Matematik leta 1826, vendar le med opombami. V samem besedilu še vedno uporablja izraz ponavljajoče razmerje, kar nakazuje na to, da si Ohm izraza ni izmislil, pač pa je bil v uporabi preden je bil zapisan.

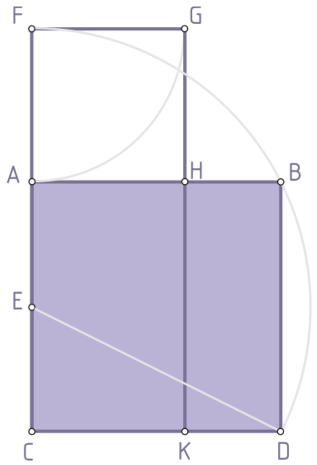
Ker je zlato razmerje mogoče izraziti tudi s številkami, dobimo matematično konstanto, ki se ji navadno reče *zlato število* in se označuje z ϕ ali τ. Oznako ϕ uvede Mark Barr v 20. stoletju, in sicer kot inicialko zgoraj omenjenih Phidiasa in Fibonaccija ($\phi = F$ v prevodu iz grške pisave v latinico). Oznaka τ pa izhaja kot okrajšava za grško besedo *tome*, v prevodu *razrezati*.

2 Zlati rez geometrijsko

Evklid v knjigi VI., trditvi 30 pokaže, kako razdeliti daljico v *ekstremnem in ponavljajočem se razmerju*, kakor on imenuje zlato razmerje.

2.1 Konstrukcija

Evklid konstruira zlati rez takole:



Evklidov konstrukcija

- Narišemo daljico AB in pod njo kvadrat s to daljico kot stranico. Dobimo kvadrat $ABDC$.
- Razpolovimo AC in dobimo E. Točka F je na nosilki AC oddaljena od E za EB.
- Točko H določimo tako, da je $AF = AH$.

Točka H deli AB v zlatem razmerju, kar sledi iz sledečega razmišljanja:
Z nekaj preračunavanja se vidi, da je pravokotnik $CKGF$ ploščinsko enak kvadratu $ABDC$. Zaradi tega sta ploščinsko enaka tudi $AFGH$ in $BDKH$. Torej:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{GH}{HK} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

Evklid je dela daljice poimenoval poimenoval *major* (večji del - $AB = M$) in *minor* (manjši del – $AH = m$) in velja:

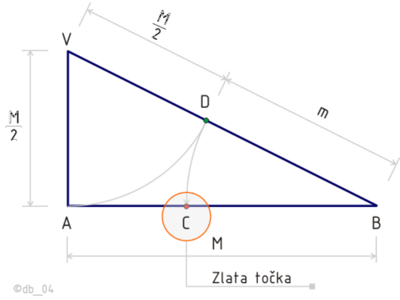
$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M},$$

ker je $\frac{AF}{AC} = \frac{AC}{CF}$. Po nekaj računanja pridemo iz te enačbe do klasične konstrukcije zlatega reza:

$$M^2 = m(m+M) = m^2 + mM = (m + \frac{M}{2})^2 - (\frac{M}{2})^2$$

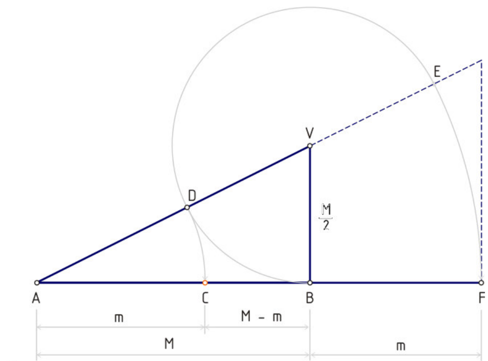
$$\Longrightarrow M^2 + (\frac{M}{2})^2 = (m + \frac{M}{2})^2$$

Torej po Pitagorovem izreku:



Konstrukcija po Pitagorovem izreku

Točko C imenujemo tudi *zlata točka*, saj deli daljico AB v *zlatem razmerju*. Tej metodi se reče tudi metoda neprekinjene delitve, saj so $(M-m, m; m, M; M, m+M)$ v stalnem sorazmerju. Definiramo lahko zunanji in notranji zlati rez: o notranjem zlatem rezu govorimo, ko moramo daljico razdeliti v zlatem rezu (na minor in na major), zunanji zlati rez pa je dopolnitev oziroma razširitev daljice, ki naj ustreza majorju do daljice, katere dopolnjeni odsek tvori s prejšnjim zlato razmerje. Več pove slika:



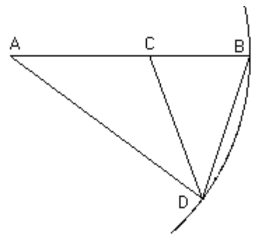
Ponavljajoča delitev

2.2 Pravilni petkotnik

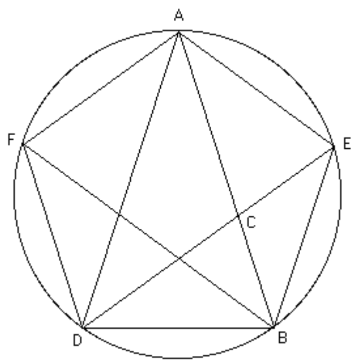
Evklid uporabi zlati rez za konstrukcijo pravilnega petkotnika in včrtavanje pravilnih poliedrov v sfero (tako dobi ikozaeder in dodekaeder). Pravilni petkotnik je z zlatim rezom močno povezan. Njegova konstrukcija je sledeča:

1. Narišemo daljico AB in jo s pomočjo zlatega reza razdelimo s točko C, da velja $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$.

2. Določimo točko D, da je $AD = AB$ in $AC = CD$.



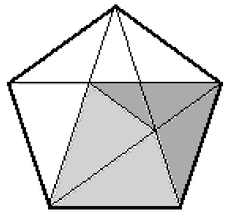
3. Ugotovimo, da je $\angle ADC = \angle CDB$. Do te ugotovitve pridemo z dokazom s protislovjem. Če bi predpostavili, da to ni res in bi z simetralo kota $\angle ADB$ dobili točko C', bi veljalo (ker simetrala kota deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic kota) sledeče: $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Ker sta obe C in C' znotraj daljice AB, sledi $C = C'$.
4. Narišemo trikotniku ADB očrtan krog.
5. Simetrala $\angle ADB$ seka AB v C, kot dokazano zgoraj, in določa točko E na krožnici. Podobno simetrala $\angle DBA$ določa točko F na krožnici.
6. Petkotnik $AFDBE$ je pravilni petkotnik. Ker namreč obodni kot nad tetivo točno določa njeno dolžino in sta obodna kota nad npr. tetivama BE in AE enaka, sledi, da sta tetivi enako dolgi. Podobno bi dokazali, da so tudi ostale dolžine stranic v petkotniku med seboj enake.



Pravilni petkotnik

V pravilnem petkotniku torej velja, da se diagonale sekajo v zlatem razmerju. Velja še več. Če pogledamo spodnjo sliko, vidimo, da je zaradi enakih kotov obarvani štirikotnik kar romb, kar pomeni, da je (na zgornji sliki) $AC = FD = a$, torej velja (v zlatem razmerju):

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$$

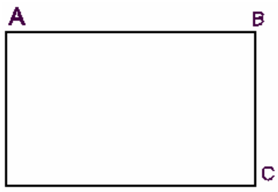


Romb med diagonalami

Zaradi dinamične simetrije je tudi hitro opazno dejstvo, da presečišča diagonal tvorijo nov pravilni petkotnik znotraj obstoječega s stranico $d - 2(d-a) = 2a - d$.

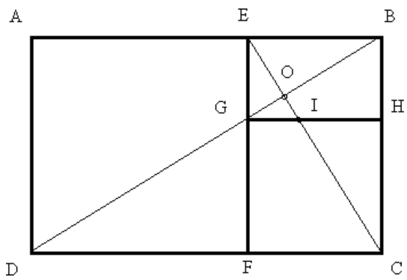
2.3 Zlati pravokotnik in zlata spirala

Zlati pravokotnik je pravokotnik, katerega stranice so v zlatem razmerju: $\frac{AB}{BC} = \phi$.



Zlati pravokotnik

Določimo: $AB = \phi$, $BC = 1$.
Naj E in F delita AB in CD v zlatem razmerju.



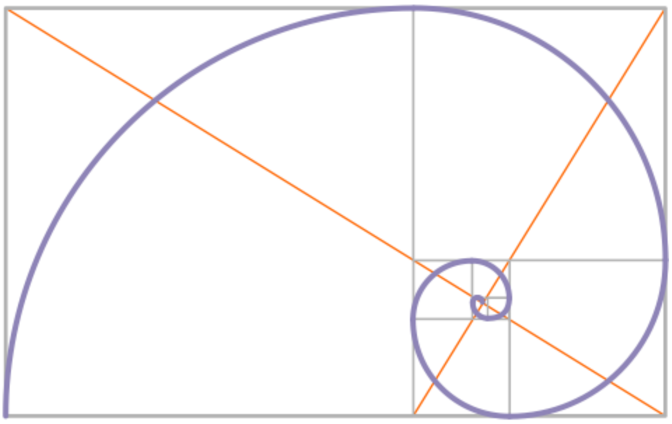
Velja: $\frac{AB}{AE} = \phi \Longrightarrow AE = 1 = DF$.
$\frac{AE}{EB} = \phi \Longrightarrow EB = \frac{1}{\phi} \Longrightarrow \frac{EF}{EB} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} = \phi$
Torej je pravokotnik $EBCF$ tudi zlati pravokotnik. Daljico EF imenujemo *zlata črta*.
Ker je $AE = 1$, je pravokotnik $AEFD$ kvadrat s stranico 1.
Potegnemo diagonalo BD in na presečišču BD z EF dobimo točko G. Ker so razmerja stranic v pravokotnih trikotnikih enaka, velja, da so naslednji trikotniki podobni med seboj:

$$\triangle EGB \sim \triangle ADB \sim \triangle FCE \sim \triangle BEC.$$

Ker je $\frac{EF}{EG} = \frac{AD}{EG} = \frac{AB}{EB} = \phi$, sledi, da točka G deli zlato črto v zlatem razmerju. Podobno iz $\frac{BD}{BG} = \frac{AB}{EB} = \phi$ sledi, da G deli tudi diagonalo BD v zlatem razmerju.

Ker je pravokotnik $EBCF$ zlati, lahko podobno kot prej sklepamo, da je pravokotnik $GHCF$ kvadrat (H dobimo s pravokotnico na EF iz G) in pravokotnik $EBHG$ zlati pravokotnik. To lahko ponavljamo rekurzivno in dobimo zaporedje zlatih pravokotnikov in njim pripadajočih kvadratov. Zlati pravokotniki konvergirajo proti točki O na presečišču BD in EC (očitno je, da je ta točka konstantna v konstrukciji zaporedja).

Če bi v dobljeno zaporedje kvadratov včrtavali četrtinske loke krožnic, kot to kaže spodnja slika, bi dobili *zlato spiralo*.



Zlata spirala

Polmeri krogov so stranice kvadratov, ki pripadajo zlatim pravokotnikom, torej zaporedoma: $1, \frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}, \ldots$.
Če postavimo središče koordinatnega sistema v točko O, dobimo enačbo zlate spirale kot logaritemske spirale:

$$r(\varphi) = \phi^{\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Pomembna lastnost logarimetske spirale je, da se ves čas krivi pod konstantnim kotom, zato se ji reče tudi enakokotna spirala.

3 Število zlatega reza

Dolgo so na zlati rez gledali kot na geometrijsko lastnost in ga niso niti poskušali povezovati s številkami.

3.1 Zgodovinsko ozadje

Prvi, ki naj bi odkril, da je zlato razmerje iracionalno, naj bi bil po nekaterih trditvah *Hippasus* iz Metaponta (500 p.n.š.). Obstoj iracionalnih števil je bil povsem v nasprotju z prepričanjem njegovih kolegov pitagorejcev, ki so verjeli, da na celih številih temelji vesoljna harmonija. Zato naj bi Hippasusa izločili iz pitagorejskega reda.

Prvi, ki je začel računati približke za zlato število je bil *Heron* (10-75 n.š.). V svojih delih je podal približke za razmerje med ploščino pravilnega petkotnika in kvadrata z isto stranico, pri čemer je izračunal stranico pravilnega petkotnika v odvisnosti od polmera očrtanega kroga.

Arabci so začeli z razvojem algebre in počasi bi lahko prišli do kvadratne enačbe, ki določa zlati rez. *Al-Khwarizmi* in *Abu Kamil* sta podala nekaj problemov glede delitve daljice z dolžino 10 na dva dela in tudi našla kvadratno enačbo za delitev zlatega reza, vendar pa ni jasno, ali sta zares povezala ta problem z zlatim rezom.

Prvi, ki pokaže, da se zaveda te povezavo je *Leonardo Fibonacci* (1170-1250), ki v svojem delu *Liber Abaci* (Knjiga o abaku, Računska knjiga) uporabi mnogo arabskih virov, med drugim tudi Abu-Kamil-jeva dela. V tem delu poda dolžini delov daljice razdeljene v zlatem razmerju kot $\sqrt{125} - 5$ in $15 - \sqrt{125}$. Fibonacci v tem delu uvede tudi prvo rekurzivno zaporedje (v Evropi), fibonaccijevo zaporedje, ki je močno povezano tudi z zlatim razmerjem.

Luca Pacioli (1445-1517) v svojem delu *De Divina proportione* (Božansko razmerje) zbere rezultate drugih in ne doda skoraj ničesar novega. Zlato razmerje je imenoval božansko razmerje, kar ni imelo nobene povezave z geometrijo, arhitekturo ali umetnostjo. Njegov razlogi so bili mistični. Videl je podobnost razmerja z Bogom: tako kot Boga ne moremo definirati in razumeti skozi besede, isto tega razmerja ne moremo izraziti z racionalnimi (razumnimi) količinami. Ostaja skrivnostno in, kot mu pravijo matematiki, iracionalno. S tem trdi (brez dokazovanja), da zlati rez ne more biti racionalen.

Leta 1509 je prvič opažena trditev, da kvocient zaporednih fibonaccijevih števil konvergira proti zlatemu številu. Dopisal jo je nekdo (ne ve se kdo) v

Paciolijevo izdajo Evklidovih Elementov.

Cardano (1501-1576), *Bombelli* (1526-1572) in drugi so v svoja dela vključili problem iskanja zlatega reza z uporabo kvadratne enačbe.

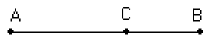
Prvi znan izračun zlatega razmerja v decimalkah je bil zapisan leta 1597 v pismu *Michaela Maestlina* (1550-1631) svojemu nekdanjemu učencu *Johannesu Keplerju* (1571-1630). Podal je približek 0.6180340 za dolžino daljšega odseka daljice dolžine 1 deljene v zlatem razmerju.

Tudi Keplerja je zlati rez prevzel in je leta 1609 v pismu trdil, da tudi on pozna konvergenco fibonaccijevih kvocientov. Neodvisno od Keplerja je ta rezultat odkril tudi *Albert Girard* (1595-1632) in je bil objavljen dve leti po njegovi smrti, leta 1634. Kljub temu ga danes navadno pripisujemo škotskemu matematiku *Robertu Simsonu* (1687-1768), ki pa je dokaz podal šele leta 1753.

Dandanes je rekordni izračun ϕ na več kot 1.5 bilijonov decimalk natančno.

3.2 Matematične lastnosti

Imamo dva načina gledanja na zlati rez in zato tudi dva načina "uštevilčenja".



1. *Notranji zlati rez*:
   Če gledamo zgornjo sliko in določimo $AB = 1$, $AC = x$, dobimo razmerje
   $$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$
   Rešitvi kvadratne enačbe sta
   $$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
   Ker je x dolžina daljice, pride v poštev le pozitivna rešitev enačbe. To število je navadno označeno s črko φ in mu ponekod pravijo *srebrno število.*
   $$\varphi = 0.6180339887498948482\ldots$$

2. *Zunanji zlati rez*:
   Na zgornji sliki zdaj $AB = x$ in $AC = 1$. Po definiciji zlatega reza dobimo:
   $$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Ta enačba je osrednja enačba zlatega reza. Njeni rešitvi sta:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

kjer moramo spet vzeti pozitivno rešitev. To število se imenuje tudi *zlato število* in je navadno označeno s črko ϕ ali τ. Jaz bom uporabila prvo.

$$\phi = 1.6180339887498948482\ldots$$

Takoj opazimo, da sta ϕ in φ v tesni medsebojni povezavi. Velja namreč:

1. $\phi - \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1$ in
2. $\phi \cdot \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1$.

Iz osnovne enačbe zlatega reza je razvidnih tudi nekaj lastnosti zlatega števila:

- Ker je ϕ koren kvadratne enačbe $x^2 - x - 1 = 0$, vemo, da je algebrsko število.
- $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ iz česar sledi, da se da zlato število zapisati tudi kot neskončni verižni ulomek:
$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}.$$
Med vsemi verižnimi ulomki ta ulomek najpočasneje konvergira. Ker iz lastnosti verižnih ulomkov vemo, da noben neskončni verižni ulomek ni racionalno število, tudi od tu sledi da je zlato število iracionalno.
- Drug način prepisa osnovne enačbe je: $\phi = \sqrt{\phi + 1}$ iz česar sledi:
$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}.$$
- Če ne vemo, da noben neskončni ulomek ni racionalno število, se da $\phi \notin \mathbb{Q}$ dokazati zelo preprosto:
Recimo $\phi \in \mathbb{Q}$ in $\phi = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q tuji. Po osnovni enačbi zlatega reza velja $\frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} = 1$, od koder sledi $p(p-q) = q^2$ in $p^2 = q(q+p)$. Torej velja, da p deli q, kar pomeni da je $p = 1$ (števili sta si tuji) in podobno $q = 1$, ker deli p. Torej je $\phi = 1$, kar pa ne ustreza osnovni enačbi: $1^2 - 1 \neq 1$. Prišli smo do protislovja s predpostavko $\phi \in \mathbb{Q}$.

Fibonaccijeva števila

Fibonacci je leta 1202 študiral problem hitrosti razmnoževanja zajcev. Problem:
Recimo, da imamo neumrljive pare zajcev, ki vsak konec meseca reproducirajo nov par zajcev, z razmnoževanjem pa začnejo šele tik pred svojim drugim mesecem starosti. Če začnemo z enim parom zajcev, koliko bo parov po določenem številu mesecev?

Odgovor na vprašanje nam da fibonaccijevo zaporedje:

$$(0), 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$$

s splošnim členom

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

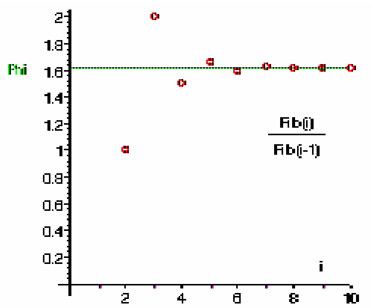
Izkaže se, da velja naslednje:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n},$$

torej:

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

kar je pa osrednja enačba zlatega reza. Torej kvocient zaporednih števil v fibonaccijevem zaporedju konvergira proti zlatemu številu.



Konvergenca fibonaccijevih kvocientov k ϕ

Na podoben način pridemo tudi do dejstva, da velja $lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} = \varphi$, torej srebrno število.

Velja tudi, da so ti kvocienti $\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1} = \frac{2}{1}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2} = 1.5, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} = 1.6667, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} = 1.615385, \ldots$ kar najboljši racionalni približki za ϕ.

Zelo zanimivo je pa tudi, da se splošni člen fibonaccijevega zaporedja izraža kot

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi)^{-n}).$$

Zaradi močne povezave zlatega števila s fibonaccijevim zaporedjem, nekateri pravijo zlatemu razmerju tudi fibonaccijevo razmerje.

Zlati rez v kombinatoriki

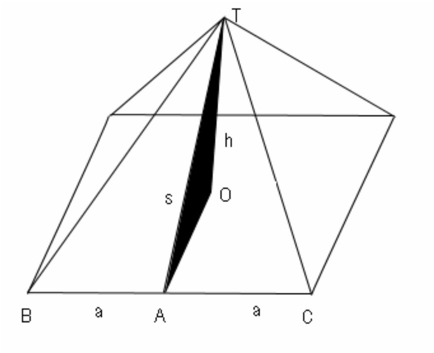
Presenetljivo je tudi, da najdemo zlati rez celo v kombinatoriki. Imamo dva igralca A in B, ki mečeta kovanec. Prvi, ki vrže grb, zmaga. Če igro začne A, je A v prednosti. Ideja je torej, da utežimo kovanec tako, da bo za A verjetnost da vrže grb manjša kot za B (imamo npr. dva različna kovanca). Izkaže se, da bo igra poštena, če bo verjetnost, da B vrže grb enaka $\frac{1}{\phi}$, verjetnost da pa A vrže grb pa bo $1 - \frac{1}{\phi}$. Kratek kombinatorični račun pokaže, da bo tako verjetnost da zmaga A enaka kot verjetnost da zmaga B.

4 Zlati rez v umetnosti

Zlati rez nekateri vidijo kot najbolj naravno razmerje. Zdi se, da se je v zgodovini veliko pojavljal v arhitekturi, slikarstvu in glasbi, ni pa povsem gotovo, da so ga ljudje uporabljali namensko. Umetnost namreč ni tako natančna kot je matematika in v arhitekturi na primer ni bistvene razlike, ali uporabiš razmerje $5 : 3 = 1.666\ldots$ (fibonaccijev približek za ϕ) ali pa ϕ. Z upoštevanjem napak materialov in gradnje ugotovimo, da je edini način, da bi ugotovili, ali je zlati rez res uporabljen v konstrukciji, proučevanje originalnih načrtov. Ti se pa na žalost v večini primerov ne ohranijo. Zato je pojavljanje zlatega reza v umetnosti zelo sporno, dejstvo pa je, da so uporabjeni in se še danes uporabljajo, če že zlati rez ne, vsaj fibonaccijevi približki za zlati rez, kar pa pomeni, da je osnova za estetiko zlatega reza utemeljena.

4.1 Egipt

Najstarejša uporaba zlatega reza naj bi se pojavila v Keopsovi Veliki piramidi v Gizi. Izmerjeno razmerje višine stranske ploskve in razdalje od ploskve do središča osnovnice približno 1.6.



Vendar pa obstajajo dokazi, ki kažejo na to, da so imeli Egipčani dovolj matematičnega znanja, da bi razumeli zlati rez šele približno tisoč let po izgradnji piramide (piramida je bil zgrajena približno leta 2500 p.n.š.). Tudi meritve kažejo na uporabo zlatega reza le zaradi določenih predpostavk in sklepanj. Danes namreč ne moremo natančno ugotoviti prvotnih mer piramide, saj se je v zadnjih 5500 letih že precej spremenila obliko. Zato je bila piramida zgrajena v takih razmerjih izključno iz estetskih razlogov in brez matematične osnove, če je sploh bila tako zgrajena.

Keopsova piramida

4.2 Grčija

Grki so zelo cenili matematiko in so se zato tudi veliko ukvarjali s temami povezanimi z zlatim rezom. *Pitagora* na primer je pripisal velik pomen zlatemu rezu s postavitvijo pravilnega petkotnika za simbol pitagorejskega reda. *Platon* je uporabil pet pravilnih teles (po njem se imenujejo platonska telesa) za model idealne lepote. V likih in telesih, ki so močno povezana z zlatim rezom so torej Grki videli lepoto in ravnovesje, vendar pa se zdi, da tega niso videli konkretno v zlatem rezu. Zato je vprašljivo, če so zlati rez res že uporabljali v arhitekturi. Evklid je namreč zlatemu rezu podal le geometrijski pomen in nikakor ni nakazano, da so ga dejansko videli kot najbolj estetsko delitev.

Nekateri predvsem na Partenonu v Atenah (zgrajen 447 p.n.š.) opazijo mnogo zlatih pravokotnikov: najbolj znana sta tisti na pročelju in območja med stebri. Spet drugi pravijo, da ta pravoktnik lahko opaziš le, če se zelo potrudiš in točke pravokotnika določiš na prav posebnih, ne ravno naravnih mestih. Dokazi naj bi bolj kazali na razmerje $9 : 4 = 2.25$, kot pa ϕ.

Partenon

Meni se zdi zato bolj logično, da se je zlati rez pojavljal v arhitekturi, in sicer skozi pravilne like in telesa, ki jih poraja. Vsi ostali proporci pa so taki, ne iz konstrukcijskih razlogov zlatega reza pač pa bolj iz estetike že takrat uveljavljenih razmerij, ki so bili približki zlatemu rezu.

4.3 Rim

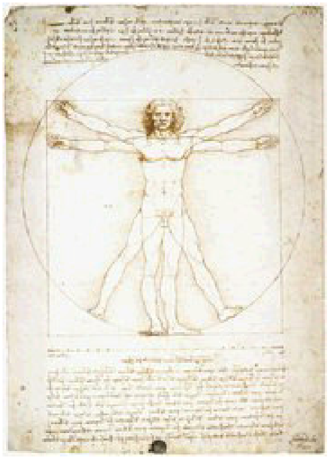
V rimskem obdobju velja omeniti arhitekta *Vitruvija* (1.stoletje p.n.š.), katerega delo *De architectura libri e decem* (33-22 p.n.š.) je najstarejše ohranjeno arhitekturno delo antike. Vitruvij v tem delu podaja ne le praktične nasvete, ampak tudi teoretične naloge ter delno omeni estetiko arhitekture. Ključna pri teoretičnih nalogah v arhitekturi je povezava med geometrijo in arhitekturo. V tretji knjigi (od desetih) opisuje idealne človeške proporce. Človeško telo si je izbral kot model za pravila razmerij. Ker se, kot bo opisano v enem od sledečih poglavij, tudi na človeškem telesu pojavi precej zlatih razmerij,bi bilo za pričakovati, da bo to Vitruvij v svoji analizi omenil. Vendar pa zlati rez nikjer ni omenjen.

4.4 Renesansa

Od Rimljanov pa do renesanse je bila ideja harmonije pozabljena. Umetniki renesanse so na novo proučevali stara antična besedila in z velikim navdušenjem obnovili pitagorejsko idejo vesoljnega ravnovesja. Krščanstvo je namreč verjelo, da je Bog po matematičnih načelih ustvaril Vesolje in je zato katoliška doktrina v znanosti in umetnosti iskala matematično ravnilo, ki ga je Bog uporabil. To vesoljno ravnovesje najdemo v urejenosti in popolnosti renesančne umetnosti. Človeško telo si renesančni umetniki izberejo kot model dobre arhitekture. Nekateri pravijo, da so renesančni umetniki uporabljali zlati rez v slikah in kipih za dosego ravnovesja in lepote, vendar pa je uporaba zlatega reza še vedno vprašljiva.

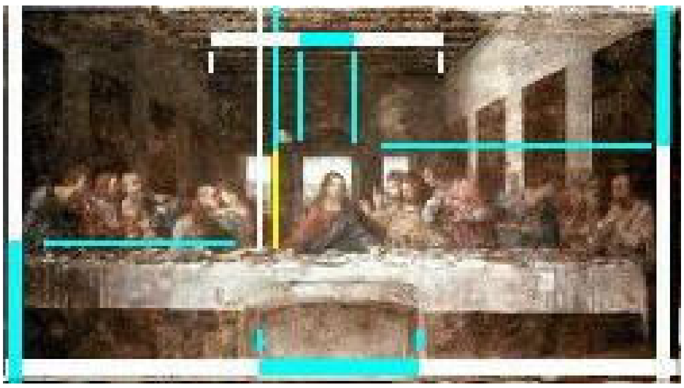
Prvi veliki oboževalec zlatega reza je bil *Luca Pacioli.* O njem je napisal delo, poimenovano po njegovem imenu za zlato razmerje: *De Divina Proportione.* Delo je sestavljeno iz treh knjig. V prvi knjigi je opisal geometrijske lastnosti zlatega reza in razložil, zakaj se mu zdi zlati rez božanski. Tu je še enkrat treba pripomniti, da ni napredoval v raziskovanju, le zbral je dotedanje ugotovitve. Veliko tudi trdi, a ničesar ne dokaže. V drugi knjigi so opisani pravilni poliedri. Opremljena je z ilustracijami *Leonarda da Vincija*, ki naj bi bil tako kot Pacioli navdušen nad zlatim rezom (navdušil naj bi ga seveda Pacioli). To delo naj bi bilo sicer plagiat knjige Pet pravilnih teles *Pierra della Francesca.* Tretja knjiga (*Tractato de l'architectura*) pa govori o uporabi zlatega reza v arhitekturi. To naj bi bila v bistvu zbirka Vitruvijevih navodil, skoraj brez kritik ali sprememb. Pacioli razume Vitruvijevega človeka v krogu kot dejstvo, da imajo geometrijski liki vir v človeškem telesu. Pacioli arhitektom svetuje uporabo racionalnih razmerij, do zlatega reza pa naj bi prišli le z geometrijsko konstrukcijo in ne z približki. Kljub temu zlatega reza ne priporoča za praktično uporabo.

Tudi slikam *Leonarda da Vincija* pripisujejo mnogo zlatih razmerij, ker je po eni strani utemeljeno, saj je od Paciolija veliko izvedel o njem. Da Vinci naj bi tako kot Vitruvij proučeval človeška razmerja in naj bi celo izkopaval trupla in meril natančne proporce med človceškimi kostmi. Narisal je študijo proporcev po Vitruvijevi analizi: *Vitruvijev človek*.



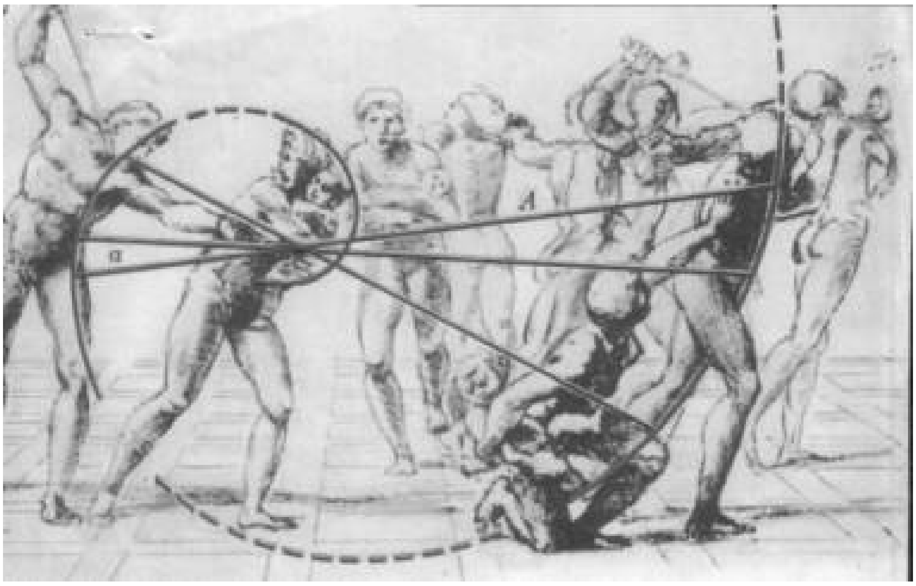
Da Vincijev Vitruvijev človek

Tudi na slavni sliki *Zadnja večerja* naj bi uporabil zlato razmerje za definiranje vseh ključnih proporcev (miza, okna, zidovi). Vendar pa ni niti dokazov za niti proti, da je uporabil zlati rez.



Da Vinicjeva Zadnja večerja

V splošnem je tako kot arhitekturo, tudi slikarstvo težko povezati z geometrijo (če ni povezava očitna). Slike namreč vsebujejo toliko skritih pomenov, da ne bi bilo težko najti tudi ϕ znotraj njih.



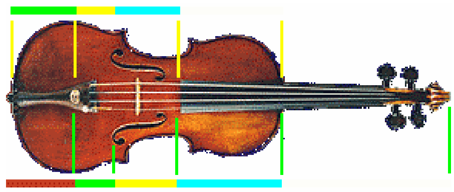
Zlata spirala na Rafaelovi sliki Tepež otrok

Zadnji, ki se je ukvarjal z zlatim rezom v obdobju renesanse je bil *Johannes Kepler*, ki je menil, da sta Pitagorov izrek in zlati rez dva velika zaklada geometrije.

4.5 Glasba

Kljub temu, da glasba temelji na racionalnem številskem sitemu, je še vedno viden estetski vpliv zlatega reza. Obstaja namreč povezava med lestvicami in fibonaccijevim zaporedjem (in s tem z zlatim rezom). Višek skladbe se pogosti pojavi na 61.8% skladbe, deli skladbe pa so pogosto v razmerju fibonaccijevih števil. *Mozart* je bil navdušen nad matematiko in obstajajo domneve, da je vpeljal zlato razmerje v svoja dela. Vendar pa je dejstvo, da se zlato razmerje ponekod očitno pojavi, drugod pa niti približno. Podobno je tudi z nekaterimi drugimi skladatelji, npr. Bach in Beethoven (5.simfonija).

Že stari Grki pa naj bi zlato razmerje uporabljali tudi za dosego idealne akustike. Ta ideja se še vedno uporablja v katedralah. Snemalni inštitut Detriota je celo zgradil Studio zlatega reza v zlatih razmerjih. Stradivarius pa je zlato razmerje uporabil pri izdelavi vrhuskih violin.



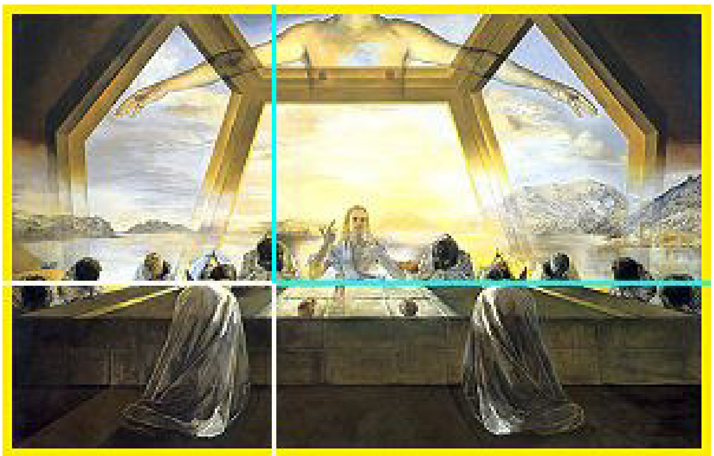
Stradivariusova violina

4.6 19. in 20. stoletje

Zlati rez vstopi v teorijo arhitekture šele v sredini 19. stoletja, ko je *Adolf Zeising* (1810-76) začel svojo raziskavo razmerij v naravi in umetnosti, da bi dobil informacije o postopku načrtovanja. Svojega dela ni dokončal. Po njegovem mnenju naj bi bil zlati rez najvišji ideal vseh oblik in razmerij, ki je našlo svoje utelešenje v človeški obliki. Človek naj bi v svojih stvaritvah nadaljeval naravo s sredstvi zlatega reza. Umetnikom da praktične nasvete glede konstrukcije človeške postave in meritve razmerij.

Zlati rez ima poseben pomen tudi v psihologiji, saj je v drugi polovici 19. stoletja poizkušala dokazati vpliv zlatega reza na ljudi, kar predstavlja začetek empirične psihologije. *Gustav Theodor Fechner* je namreč leta 1864 opazil, da je med množico pravokotnikov (od kvadrata do dvojnega kvadrata) večina preizkušancev izbrala za najlepšega zlati pravokotnik. Ker tega ni uspel potrditi tudi za elipso in na delitvi daljice, se mu je zdelo, da je imel Zeising previsoko mnenje o estetski vrednosti zlatega reza. Noben kasnejši preizkus glede estetske oblike zlatega pravokotnika ni več dal enakega rezultata kot Fechnerjev.

V slikarstvu so zlati rez zagotovo uporabili *Paul Serusier*, *Juan Gris* in *Giro Severini* v 19. stoletju, nekateri pa ga neutemeljeno pripisujejo tudi *Georgesu Seuratu* (1859-91) v njegovem slavnem delu *Parada cirkusa*. Namenoma je v Sakramentu zadnje večerje *Salvador Dalí* (1904-89) svojo sliko uokviril v zlat pravokotnik, tako kot da Vinci, postavil mizo v zlati rez višine slike, postavil dva apostola v zlatih rezih širine slike, okna v ozadju pa podal kot del velikega dodekaedra. Vendar pa so vse naštete uporabe zlatega reza bolj iz lastnih razlogov in namenske, kot pa iz estetskih razlogov.



Dalí-jev Sakrament zadnje večerje

V arhitekturi 20. stoletja pa je treba omeniti še dve slavni imeni, ki sta se ukvarjala z zlatim rezom in sta v svojo arhitekturno teorijo vpeljala pojem zlatega reza: *Le Corbusier* (1887-1965) in *Ernst Neufert* (1900-86). Neufert je upal na prenovitev arhitekture skozi zlati rez, Le Corbusier pa ga je uporabil za razvoj svojega kataloga mer, ki zaradi zaokrožitev nima več dosti povezave z zlatim rezom in fibonaccijevim zaporedjem. Le Corbusier je sicer poizkušal uporabiti zlati rez za ustvarjanje idealnih arhitekturnih razmerij, a je ugotovil, da so rezultati užaloščujoči. Rešitev tega problema je uporaba razmerij $5:3$ in $8:5$

4.7 Danes

V današnjem svetu je najzanimivejša uporaba zlatega reza v kreditnih karticah. Tudi sedež Združenih narodov v New Yorku vsebuje veliko zlatih pravokotnikov. Vendar pa je zanimivo, da ga pa ne najdemo tam, kjer bi ga najbolj pričakovali. Knjige na primer niso skoraj nikoli v formatu zlatega reza. Ravno tako velikost papirja A4: njegova razmerja imajo povezavo z $\sqrt{2}$. Je pa delno vključen v miselnost ljudi in ga zaradi tega umetniki več uporabljajo, kot so ga včasih.

Kreditna kartica

5 Zlati rez v naravi

Za ljudi se zgodovina zlatega reza začne z Evklidom 300 let p.n.š., za naravo pa že eone let nazaj. Narava je namreč utelešenje zlatega reza in za razliko od umetnosti se to povezavo v večini primerov da celo utemeljiti.

Razmerja, ki se pojavljajo v rastlinah proučuje *filotaksa.* Veliko se v naravi pojavljajo zlati rez, logaritemska spirala in fibonaccijeva števila in ker so tako zelo povezana je treba premisliti katero je tisto, ki se v naravi najbolj naravno pojavlja, ostali dve pa potem sledita kot pirbližka. Po mojem mnenju je ta ključna stvar logaritemska spirala, pojavlja se namreč pod najbolj razumljivimi razlogi, tako da zlati rez in fibonaccijeva števila izpadeta nič več kot približka za zlato spiralo.

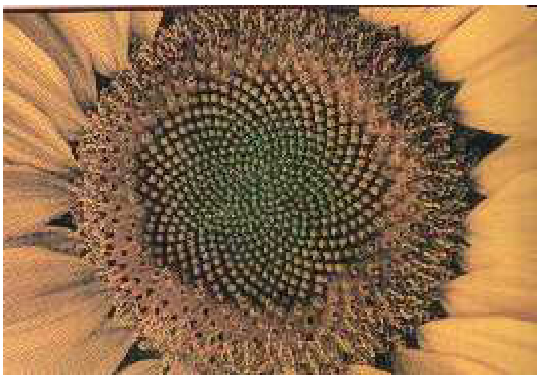
Logaritemsko spiralo je opaziti v veliko pojavih: let sokola proti plenu, oblika glavonožčeve školjke, orkani in spiralne galaksije.

Sokol. Ko sokol lovi svoj plen, se spusti proti njemu v loku v obliki spirale. Razlog za to je, da ima glavo ves čas pod istim kotom, fiksirano tako, da lahko med letom opazuje svoj plen. Zaradi fiksnega kota dobi njegova pot obilko enakokotne spirale s središčem v lokaciji plena.

Glavonožčeva školjka. Rast glavonožčevi školjki narekuje zlata spirala. Ob rasti ima namreč glavonožec potrebo po povečanju bivalnega prostora, ki pa je najučinkovitejše z logaritemsko spiralo. Tako se bo namreč volumen eksponentno povečeval (razdalja med dvema sledečima lokoma pri spirali je namreč eksponentna).

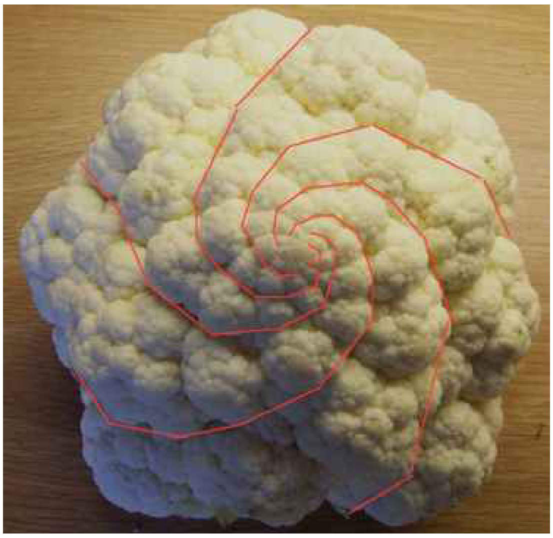
Spiralna oblika glavonožčeve školjke

Sončnica. Semena sončnične glave (na cvetu) tvorijo različne spirale v obesmeri (v smer urinega kazalca in obratno). Vsako seme nastane v središču spiral in ga naslednje seme izrine v smeri spirale. Na ta način so semena najlažje in najučinkovitejše zložena, ko rastejo. Sama števila spiral so različna od rastline do rastline, vedno pa velja, da sta števili spiral v eni in v drugi smeri zaporedni fibonaccijevi števili.



Sončnična glava

Podobno stvar srečamo tudi pri cvetači.

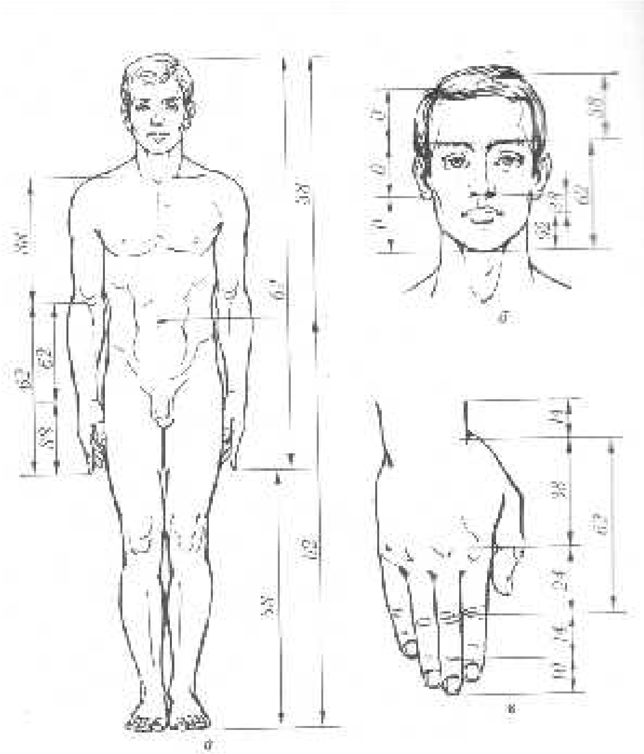


Cvetača in njene spirale

Listi. Novi listi okoli stebla imajo tudi lastnost, da naj bi nastajali pod kotom približno $137.5^\circ \doteq 360^\circ - \frac{360}{\phi}^\circ$ glede na prejšnji novo nastali list okoli stebla. Razlog za to povezavo je v tem, da na ta način lahko listi zapolnejo prostor na najučinkovitejši možni način.

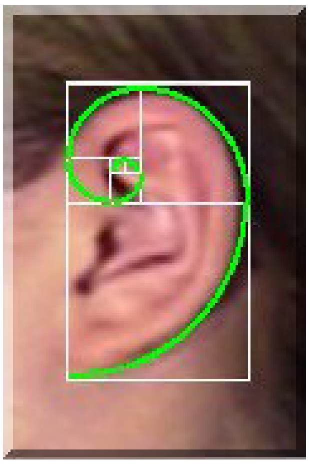
Pomembno je tudi, da bo pri vseh zgoraj omenjenih stvareh največja učinkovitost, ko bo kot rasti (kot spirale) najdlje od racionalnih števil: tako bo namreč najpočasneje prišlo do sklenitve kroga (do katerega pride zaradi matematičnih napak). Takrat bo verjetnost ciklanja v praksi najmanjša. Zato potrebujemo najbolj iracionalno spiralo: to pa je zlata spirala, saj je ϕ najbolj iracionalno število. Tudi Fibonaccijeva števila se v naravi pojavljajo kot najboljše naravne aproksimacije za zlato število.

Človek. Tudi na človeškem telesu so nekatera razmerja neverjetno blizu zlatega. Če vzamemo na primer prst. Razdalja od tretjega členka do drugega proti razdalji od drugega do prvega je približno enaka zlatemu številu. Enako je tudi razmerje višine proti višini do popka, širina ust proti širini nosa, ramena do konic prstov prito komolcu do konic prostov, višina kolka proti višini kolena.



Človeška razmerja

Najdemo celo zlato spiralo.



Zlata spirala v ušesu

6 Zaključek

Kljub temu, da so morda stari Grki v zlatem pravokotniku videli popoln pravokotnik, ga moderni ljudje danes več ne. Na to vsaj kažejo raziskave. Zlati pravokotnik ni najlepša izbira pač pa le srednja izbira. Klasičen primer so zgoraj omenjene knjige, katerih skoraj nobeno razmerje ne pride niti blizu zlatega razmerja. Kljub temu, da je zlato število zelo posebno število in je edinstven tako v matematiki, kot v naravi, ima tudi kulturni pomen kot število, o katerem je največ napačnih prepričanj. Problem pri iskanju zlatega števila je v tem, da če dovolj iščeš, ga boš povsod našel. Vprašanje je, ali gre za kaj več kot golo numerologijo. V naravi gre, pri človeških stvaritvah se pa v to težko prepričamo.

Literatura

[1] J.J.O'Connor, E.F.Robertson: *The Golden Ratio*, www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Golden_ratio.html

[2] Dr. Ron Knott : *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

[3] Simon Plouffe: *Table of current records for the computation of constants*, http://pi.lacim.uqam.ca/eng/records_en.html

[4] Eric W. Weisstein: *Golden Ratio*, http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html

[5] *Phi: The Golden Number*, http://goldennumber.net/classic/index.html

[6] A. Kursat Erbas: *The Golden Mean*, http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/ Erbas/KURSATgeometrypro/goldenratio/goldenratio.html

[7] Wikipedia: *Golden Ratio*, http://www.answers.com/topic/golden-ratio

[8] BBC: *Phi*, http://www.bbc.co.uk/dna/h2g2/A2346374

[9] Michelle Stanton *Phi - The Golden Section*, http://people.bath.ac.uk/ma1mcs/goldenratio.html

[10] William R. Corliss: *Did Mozart Use The Golden Section?*, http://www.science-frontiers.com/sf107/sf107p14.htm

[11] Hans Walser: *The Golden Section*, http://www.maa.org/reviews/golden.html

[12] Steve Blacker, Jeanette Polanski, and Marc Schwach: *The Golden Ratio*, http://www.geom.uiuc.edu/ demo5337/s97b/art.htm

[13] University of Bath: *The Golden Ratio*, http://people.bath.ac.uk/jaj21/phihome.html

[14] Golden Museum: *Welcome to the Museum of Harmony and Golden Section*, http://www.goldenmuseum.com

[15] Gale Group, American Museum of Natural History: *The golden number: nature seems to have a sense of proportion*, http://www.findarticles.com/p/articles/mi_m1134/is_2_112/ ai_98254967/pg_2

[16] Michael J. Ostwald: *Under Siege: The Golden Mean in Architecture*, http://www.nexusjournal.com/Ostwald.html

[17] Keith Devlin: *Good stories, pity they're not true*, http://www.maa.org/devlin/devlin_06_04.html

[18] Marcus Frings: *The Golden Section in Architectural Theory*, http://www.nexusjournal.com/Frings.html

[19] eSocial Science News: *Da Vinci's First Code: Our Numbers Our Gods, the Pentagram* , http://www.sociologyesoscience.com/davincicode/firstcode.html

[20] Scott: *Scott's Phi Page*, http://www.germantownacademy.org/academics/US/Math/Geometry/stwk98/SCOTTRK/Index.htm

[21] H. Peter Aleff: *Ancient Creation Stories told by the Numbers*, http://www.recoveredscience.com/const305goldenprehistory.htm