Fakulteta za matematiko in fiziko
Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Ljubljana, 12. april, 2000

S E M I N A R 1

PLEMLJEVA KONSTRUKCIJA PRAVILNEGA SEDEMKOTNIKA

TANJA GARVAS
3. letnik,
pedagoška matematika

O AVTORJU

Josip Plemelj (1873 – 1967) predstavlja veliko avtoriteto med slovenskimi matematiki. Svoj matematični talent je pokazal že v osnovni šoli, ko je kot četrtošolec pomagal maturantom pri zahtevnih nalogah. Študij matematike, fizike in astronomije je nadaljeval na Dunaju. Po končani prvi svetovni vojni je kot član univerzitetne komisije sodeloval pri ustanavljanju slovenske Univerze in bil izvoljen za rektorja. Na Univerzi je predaval matematiko 40 let.

Na predavanja se ni posebej pripravljal, tudi ni imel nobenih zapiskov, snov zanje pa je premislil kar med potjo v službo. Kljub temu je bil odličen predavatelj. Študentje so imeli vtis, da snov ustvarja pred njimi. Izredno lepo je pisal formule in tudi od študentov je zahteval razločno pisanje ter jih navajal na lep jezik, predvsem na jasno in logično izražanje.

V matematiki je veliko prispeval k *algebri, teoriji potenciala, teoriji števil, funkcijski teoriji* ter k *integralskim* in *diferencialnim enačbam.*

PLEMLJEVA KONSTRUKCIJA PRAVILNEGA SEDEMKOTNIKA

Oglejmo si konstrukcijo pravilnega sedemkotnika v enotski krožnici.

Vprašanje obstoja natančne konstrukcije si je Plemelj zastavil že v gimnaziji. Pri sedemnajstih letih je prišel do rešitve s pomočjo trisekcije kota, ker pa le-ta ni natančna, je njegova rešitev zelo dober približek točni rešitvi.

Za konstrukcijo potrebujemo dolžino stranice, ki jo s šestilom nanašamo na krožnico. Dolžina stranice je enaka razdalji med sosednjima ogliščema. Oglišča pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotsko krožnico, so rešitve enačbe

$$x^7 - 1 = 0 \tag{1}$$

v kompleksni ravnini. Množica rešitev R te enačbe je enaka

$$\mathrm{R} = \{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{k}\Pi\mathrm{i}}{7}};\ \ \mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Naj bo $\xi = e^{\frac{6\Pi i}{7}}$. Označimo

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi + \xi^{-1}, \\ y_2 &= \xi^2 + \xi^{-2}, \\ y_3 &= \xi^4 + \xi^{-4}. \end{aligned}$$

Poiščimo enačbo, katere koreni so števila y_1, y_2 in y_3. To je polinom tretje stopnje, oblike $y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0$. Zveza med koeficienti polinoma in koreni, ki rešijo ta polinom, je

$$\begin{aligned} -a_1 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ a_2 &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3, \\ -a_3 &= y_1y_2y_3. \end{aligned}$$

Množica R je ciklična grupa praštevilske moči, zato je vsak njen element generator in njegov red je enak moči grupe.

V našem primeru je moč grupe enaka sedem, torej je

$$\xi^7 = 1,$$

$$\xi^n \neq 1 \text{ za n} < 7.$$

Ker je ξ primitivni koren, so vse potence $\xi,\ \xi^{-1},\ \xi^2,\ \xi^{-2},\ \xi^4$ in ξ^{-4} med seboj različne.

Sedaj izračunajmo vsoto $\xi + \xi^{-1} + \xi^2 + \xi^{-2} + \xi^4 + \xi^{-4}$. Števila $\xi,\ \xi^{-1},\ \xi^2,\ \xi^{-2},\ \xi^4,\ \xi^{-4}$ so koreni enačcbe (1) in zato koreni enačbe

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0.$$

Zaradi že omenjene zveze med koeficienti polinoma in njegovimi koreni je

$$-1 = \xi + \xi^{-1} + \xi^2 + \xi^{-2} + \xi^4 + \xi^{-4}.$$

Ker je $\xi^6 = \xi^{-1}$, $\xi^5 = \xi^{-2}$ in $\xi^3 = \xi^{-4}$, sledi: $-a_1 = \xi + \xi^{-1} + \xi^2 + \xi^{-2} + \xi^4 + \xi^{-4} = -1$,

$$\begin{aligned} a_2 &= (\xi + \xi^{-1})\,(\xi^2 + \xi^{-2}) + (\xi^1 + \xi^{-1})\,(\xi^4 + \xi^{-4}) + (\xi^2 + \xi^{-2})\,(\xi^4 + \xi^{-4}) = \\ &= \xi^3 + \xi^{-1} + \xi^1 + \xi^{-3} + \xi^5 + \xi^{-3} + \xi^3 + \xi^{-5} + \xi^6 + \xi^{-2} + \xi^2 + \xi^{-6} = \\ &= 2\,(\xi + \xi^{-1} + \xi^2 + \xi^{-2} + \xi^4 + \xi^{-4}) = \\ &= -2\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_3 &= (\xi + \xi^{-1})\,(\xi^2 + \xi^{-2})\,(\xi^4 + \xi^{-4}) = \\ &= (\xi^3 + \xi^{-1} + \xi^1 + \xi^{-3})\,(\xi^4 + \xi^{-4}) = \\ &= \xi^7 + \xi^{-1} + \xi^5 + \xi^{-3} + \xi^3 + \xi^{-5} + \xi + \xi^{-7} = \\ &= 1 + \xi^{-1} + \xi^{-2} + \xi^4 + \xi^{-4} + \xi^2 + \xi + 1 = \\ &= 2 - 1 = 1\ . \end{aligned}$$

Dobimo polinom

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \tag{2}$$

Poglejmo si, kako lahko enega od korenov enačbe (2) izrazimo s kvadratom stranice sedemkotnika. Vzamemo konjugiran par ξ in $\overline{\xi}$. Število $\overline{\xi}$ je enako ξ^{-1}, saj je za števila, ki so po absolutni vrednosti enaka 1, konjugirano število kar recipročna vrednost prvotnega števila. Če števili ξ in ξ^{-1} med seboj odštejemo, nam ostane le imaginarni del.

Izračunajmo
$$\begin{aligned}|\xi - \xi^{-1}|^2 &= (\xi - \xi^{-1})\,\overline{(\xi - \xi^{-1})} = \\ &= 2 - (\xi^2 + \xi^{-2}) = \\ &= 2 - y_2,\end{aligned}$$

to pa je ravno dolžina stranice sedemkotnika. Označimo jo z s_7. Dobili smo zvezo
$$y_2 = 2 - s_7.$$

Vstavimo y_2 v enačbo (2)
$$(2 - s^2)^3 + (2 - s^2)^2 - 2(2 - s^2) - 1 = 0,$$

zmnožimo in dobimo
$$s^6 - 7s^4 + 14s^2 - 7 = 0,$$

oziroma
$$s^6 - 7(s^2 - 1)^2 = 0.$$

Enačbo razstavimo po pravilu *razlike dveh kvadratov*
$$(s^3 + \sqrt{7}(s^2 - 1))\,(s^3 - \sqrt{7}(s^2 - 1)) = 0, \tag{3}$$

jo preuredimo in dobimo
$$(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{7}})\,(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{\sqrt{7}}) = 0.$$

Na tem koraku upoštevamo dejstvo, da je stranica šestkotnika, včrtanega v enotsko krožico, enaka ena, torej bo stranica sedemkotnika manjša od 1, zato upoštevamo le rešitve enačbe
$$\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ . \tag{4}$$

Enačbo (4) zapišemo v obliki $y^3 + 3py + 2q = 0$ in jo rešimo s pomočjo Cardanove formule. Uvedemo substitucijo $\frac{1}{s} = u + v$, kjer sta

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}\ ,$$
$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}\ .$$

V našem primeru je

$$3p = -1,$$
$$2q = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

in zato

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{7}} + \sqrt{-\frac{1}{756}}}\ ,$$
$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{7}} - \sqrt{-\frac{1}{756}}}\ ,$$

ali

$$u^3 = \frac{1}{2\sqrt{7}} + i\sqrt{\frac{1}{\sqrt{756}}}\ ,$$
$$v^3 = \frac{1}{2\sqrt{7}} - i\sqrt{\frac{1}{\sqrt{756}}}\ .$$

Rešitvi zapišemo v polarnih koordinatah

$$u^3 = \sqrt{\frac{1}{27}}\ (\cos(\varphi + 2\mathrm{k}\Pi) + i\sin(\varphi + 2\mathrm{k}\Pi)) \ \text{ za k} \in \mathbf{Z}$$
$$v^3 = \sqrt{\frac{1}{27}}\ (\cos(\varphi + 2\mathrm{k}\Pi) - i\sin(\varphi + 2\mathrm{k}\Pi)) \ \text{ za k} \in \mathbf{Z}$$

kjer je $\varphi = \arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$, torej je $\tan\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Sledi

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{27}}}\ (\cos\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3}) \ \text{ za k} = 0, 1, 2\ ,$$
$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{27}}}\ (\cos\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3}) \ \text{ za k} = 0, 1, 2\ ,$$

oziroma

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\cos\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3})\quad \text{za k} = 0, 1, 2\ ,$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\cos\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\Pi}{3})\quad \text{za k} = 0, 1, 2\ .$$

Iščemo realno, pozitivno rešitev, zato med rešitvami

$$\begin{aligned}
\mathrm{k} = 0, &\quad \tfrac{1}{\mathrm{s}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\tfrac{\varphi}{3}\ , \\
\mathrm{k} = 1, &\quad \tfrac{1}{\mathrm{s}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\tfrac{\varphi+2\Pi}{3}\ , \\
\mathrm{k} = 2, &\quad \tfrac{1}{\mathrm{s}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\tfrac{\varphi+4\Pi}{3}\ ,
\end{aligned}$$

$$\text{kjer je } \varphi \in (0, \tfrac{\Pi}{2}) \text{ ali } \tfrac{\varphi}{3} \in (0, \tfrac{\Pi}{6})\ ,$$

izberemo

$$\frac{1}{s_7} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\ ,\ \text{kjer je}\quad \tan\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ .$$

Sedaj si poglejmo še potek konstrukcije:

Izračunali smo dolžino stranice sedemkotnika

$$s_7 = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\varphi}{3}}\ .$$

Narišemo krožnico s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in z radijem ena. Presečišče z abscisno osjo označimo z A.

Najprej bi radi bi narisali kot φ, tako da bo

$$\tan\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ .$$

Ker je $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\Pi}{6}$, odmerimo v točki A kot $\frac{\Pi}{6}$ in sliko dopolnimo do pravokotnega trikotnika $\triangle OAB$. Ker trisekcija kota v splošnem ni možna, lahko namesto da tretinjimo kot, tretinjimo kateto $\overline{OB}$. Tako dobimo pravokotni trikotnik $\triangle CAB$ s kotom φ v oglišču A. Ponovno tretinjimo kateto $\overline{CB}$.

Tako smo daljico $\overline{OB}$ razdelili na devet enakih delov in za naš kot $\frac{\varphi}{3}$ vzamemo kot ob oglišču A trikotnika $\triangle DAB$.

Vidimo da je

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{DA}\ ,$$

torej je najboljši približek za stranico s_7 daljica $\overline{AD}$.

Oglejmo si rešitve pravilnega sedemkotnika pri polmeru r:

- točna rešitev: $s_7 = r * 0.8677675$,
- Plemljeva rešitev: $s_7 = r * 0.8678055$.

Plemljeva rešitev je zelo dober približek, saj je napaka njegove konstrukcije pri radiju enega metra samo 0.038 mm. V uporabi pa že popolnoma zadošča, da za stranico s_7 vzamemo kar kateto $\overline{AB}$.